BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. **a) (3p)** Descompuneți în factori numărul $4n^4+1$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b) (4p) Determinați partea întreagă a numărului $A=\frac{4}{5}+\frac{8}{65}+\frac{12}{325}+...+\frac{4n}{4n^4+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică Nr. 10/2014

Soluție: a) $4n^4+1=4n^4+4n^2+1-4n^2=\left(2n^2+1\right)^2-4n^2=\left(2n^2+1-2n\right)\left(2n^2+1+2n\right)=\left(2n^2-2n+1\right)\left(2n^2+2n+1\right)$

b) Aplicând punctul a) avem în general avem: $\frac{4k}{4k^4+1}=\frac{4k}{\left(2k^2-2k+1\right)\left(2k^2+2k+1\right)}=\frac{\left(2k^2+2k+1\right)-\left(2k^2-2k+1\right)}{\left(2k^2-2k+1\right)\left(2k^2+2k+1\right)}=$

$=\frac{2k^2+2k+1}{\left(2k^2-2k+1\right)\left(2k^2+2k+1\right)}-\frac{2k^2-2k+1}{\left(2k^2-2k+1\right)\left(2k^2+2k+1\right)}=\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $A=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{25}+...+\frac{1}{2n^2-2n+1}-\frac{1}{2n^2+2n+1}=1-\frac{1}{2n^2+2n+1}$.

Deoarece $0<\frac{1}{2n^2+2n+1}<1\Rightarrow 0<A<1\Rightarrow$ partea întreagă a lui A este 0.

Barem

a) $4n^4+1=\left(2n^2-2n+1\right)\left(2n^2+2n+1\right)$	**3p**
b) Aplică punctul a) și determină $A=1-\frac{1}{2n^2+2n+1}$	**3p**
$0<\frac{1}{2n^2+2n+1}<1\Rightarrow 0<A<1\Rightarrow$ partea întreagă a lui A este 0	**1p**

2. **a) (3p)** Demonstrați că $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$, pentru orice numere $k\geq 0$.

b) (4p) Arătați că: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}<90$.

Dorel Ispășoiu, Gura Humorului

Soluție. a)

$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}\Leftrightarrow 2\sqrt{k\left(k+1\right)}+1<2\left(k+1\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{k\left(k+1\right)}<2k+1\Leftrightarrow\left(2\sqrt{k\left(k+1\right)}\right)^2<\left(2k+1\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k\left(k+1\right)<4k^2+4k+1\Leftrightarrow 4k^2+4k<4k^2+4k+1\Leftrightarrow 0<1$, adevărată pentru pentru orice numere $k\geq 0$.

b) Aplicăm inegalitatea de la punctul a) pentru: $k=0\Rightarrow 0+1<2\sqrt{1}$; $k=1\Rightarrow 2\sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$;

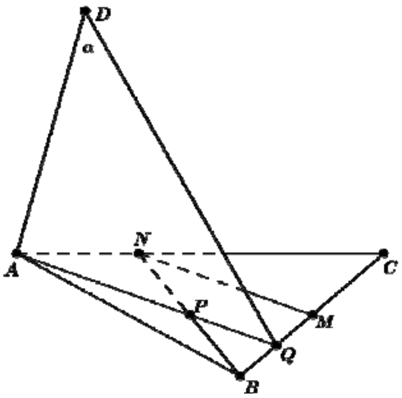
$k=2\Rightarrow 2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}$; ...; $k=2014\Rightarrow 2\sqrt{2014}+\frac{1}{\sqrt{2015}}<2\sqrt{2015}$. Adunând inegalitățile membru cu membru obținem $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}<2\sqrt{2015}<90$, pentru că $\sqrt{4\cdot 2015}<\sqrt{90^2}\Leftrightarrow 8060<8100$

Barem.

a) Ajunge la $2\sqrt{k\left(k+1\right)}<2k+1$	**2p**
Finalizare	**1p**
b) Folosește inegalitatea de la punctul a) dând lui k valorile 0, 1, 2,...,2014	**1p**
Însumează corect relațiile și ajunge la $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}<2\sqrt{2015}$	**2p**
Arată că $2\sqrt{2015}<90$ și finalizează	**1p**

3. Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare, M mijlocul segmentului $\left(BC\right)$ și $N\in\left(AC\right)$, cu $AC=3AN$. Un plan α ce conține dreapta AD intersectează segmentul $\left(BN\right)$ în P. Arătați că $MN\parallel\alpha$ dacă și numai dacă P este mijlocul segmentului $\left(BN\right)$.

Soluție. $(\Rightarrow)$ Observăm că $A\in(ABC)\cap\alpha$, deci $(ABC)\cap\alpha=d, A\in d$. Cum $MN\subset(ABC)$ și $MN\,||\,\alpha$ rezultă că $MN\,||\,d$. Fie $\{Q\}=d\cap BC$. Din teorema lui Thales în triunghiul CAQ găsim $\frac{QM}{QC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$. Deducem că $QM=\frac{BC}{4}$, de unde $BQ=QM$. Dar $BN\cap\alpha=BN\cap d$, deci $\{P\}=BN\cap AQ$. Cum $PQ\,||\,MN$ și Q este mijlocul lui (BM), rezultă că P este mijlocul lui (BN).



$(\Leftarrow)$ Fie $\{P\}=BN\cap\alpha$ mijlocul lui (BN) și notăm cu $\{Q\}=(ADP)\cap BC$, unde $(ADP)=\alpha$. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul BNC, cu transversala $A-P-Q$: $\frac{AN}{AC}\cdot\frac{QC}{QB}\cdot\frac{PB}{PN}=1$. Deducem că $\frac{QC}{QB}=3$, de unde Q este mijlocul lui (BM) (găsim $QB=\frac{BC}{4}=QM$). Atunci $[PQ]$ este linie mijlocie în triunghiul BMN, deci $PQ\,||\,MN$. Cum $PQ\subset\alpha$, rezultă $MN\,||\,\alpha$.

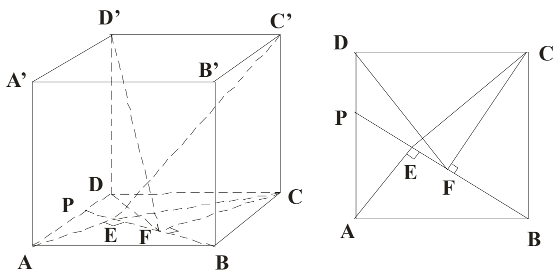
Barem.

$(\Rightarrow)$ Arată că $MN\,||\,d$ unde $(ABC)\cap\alpha=d, A\in d$	**2p**
Obține $QM=\frac{BC}{4}$	**1p**
Finalizare P este mijlocul lui (BN)	**1p**
$(\Leftarrow)$ Deduce $\frac{QC}{QB}=3$	**1p**
Obține $PQ\,||\,MN$	**1p**
Finalizare $MN\,||\,\alpha$	**1p**

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și $P\in(AD)$. Dacă $AE\perp BP$ și $CF\perp BP$, $E,F\in(BP)$, demonstrați că $[C'E]\equiv[D'F]$.

Stela Boghian, Suceava

Soluție.



Din $\sphericalangle ABE\equiv\sphericalangle BCF$ (au același complement $\sphericalangle CBF$) și $[AB]\equiv[BC]$ (ip.) rezultă că conform cazului I.U. că $\Delta ABE\equiv\Delta BCF\Rightarrow[BE]\equiv[CF]$ (1).

Din $\sphericalangle CBE\equiv\sphericalangle DCF$ (au același complement, $\sphericalangle BCF$), $[BC]\equiv[CD]$ și $[BE]\equiv[CF]$ (demonstrat (1)) rezultă conform cazului L.U.L. că $\Delta BCE\equiv\Delta CDF\Rightarrow[CE]\equiv[DF]$ (2). Din

Din $CC'\perp(ABC)$ și $CE\subset(ABC)\Rightarrow CC'\perp CE$. Din $DD'\perp(ABC)$ și $DF\subset(ABC)\Rightarrow DD'\perp DF$.

Folosin relațiile (1) și (2) avem $\Delta CC'E\equiv\Delta DD'F$ (conform cazului C.C.)$\Rightarrow[C'E]\equiv[D'F]$.

Barem.

Arată că $[BE]\equiv[CF]$	**2p**
Arată că $[CE]\equiv[DF]$	**2p**
Arată că $CC'\perp CE$ și analog că $DD'\perp DF$	**2p**
Arată că $\Delta CC'E\equiv\Delta DD'F$ (conform cazului C.C.)$\Rightarrow[C'E]\equiv[D'F]$.	**1p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.